Carathéodory の定理と Schur の定理

柳原 宏

Contents

Abstract

subordination の基礎を追求して行くと, どうしても単位円板 $\mathbb{D}$ 上の解析函数 f で $\mathrm{Re}\, f(z) > 0$ を満たすものの全体と $|f(z)| \le 1$ を満たすものの全体であるの 2 つの函数族と, その係数に関する評価が問題になる. これら 2 つの函数族について, 係数体がどうなるかは記述が複雑ではあるものの, 必要十分条件の形のものが古くから知られている. それぞれ Carathéodory の定理と Schur の定理というのだが, 今日では函数族自身が彼らの名前をつけられて呼ばれるようになっている.

ここでは辻先生の [1] "Potential Theory in Modern Function Theory" を参考にして (証明の細部を補い, 簡略化した) Carathéodory の定理の証明をまとめ, それをもとに Schur の定理を導いた. 他に参考になるのは Goluzin の [2] "Geometric Theory of functions of a complex variables" であり, こちらは Carathéodory の定理を経由することなく Schur の定理の導出を行なっている. また subodrination への応用時に使うという観点からは 1932 年の Rogosinski の論文 [3] も面白い.

1 Carathéodory class

函数 f は単位円板 $\mathbb{D}$ で解析的であるとし, 原点のまわりでの Taylor 展開を $f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ と置く. 何故 $f(0) = \frac{a_0}{2}$ と置くのかは後ほど分かるが, ここでは $a_0 > 0$ と仮定して $a_{-n} = \overline{a_n}$ for $n = 1, 2, \ldots$ と置き

$$H_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-n} & a_{-n+1} & a_{-n+2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \overline{a_1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \overline{a_{-2}} & \overline{a_1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_n} & \overline{a_{n-1}} & \overline{a_{n-2}} & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

と定義すれば H_n は Hermite 行列である. H_n に付随する Hermite 形式を

$$H_n[w_0, \ldots, w_n] = \sum_{k,\ell=0}^{n} a_{k-\ell} \overline{w}^k w^\ell.$$

と表す.

単位円板上で解析的な函数 f で $\operatorname{Re} f(z) > 0$, $f(0) > 0$ を満たすもの全てがなす族を $\mathcal{P}$ で表す. 各函数 $f \in \mathcal{P}$ について $f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ と上記のように表す. このとき $\operatorname{Re} f(z) > 0$ より $\partial\mathbb{D}$ 上の Borel 測度 μ で

$$f(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\mu(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{1.2}$$

が成り立つものが一意的に存在する. ここで

$$\frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \frac{1 + (z/\zeta)}{1 - (z/\zeta)} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (z/\zeta)^n,$$

より

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{\partial\mathbb{D}} \left\{ 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (z/\zeta)^n \right\} d\mu(\zeta) \\ &= \mu(\partial\mathbb{D}) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{\partial\mathbb{D}} \zeta^{-n}\, d\mu(\zeta) \right\} z^n. \end{aligned}$$

であるから, まず $f(0) = \mu(\mathbb{D})$ であり $a_0 = 2\mu(\mathbb{D}) = 2\int_{\partial\mathbb{D}} d\mu(\zeta)$ が成り立つ. また $a_n = 2\int_{\partial\mathbb{D}} \zeta^{-n}\, d\mu(\zeta)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ が成り立つ. ここで $a_{-n} = \overline{a_n}$ for $n = 1, 2, \ldots$ と定義したことを思い出せば

$$a_n = 2\int_{\partial\mathbb{D}} \zeta^{-n}\, d\mu(\zeta) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{1.3}$$

が成り立つことが分かる.

Theorem 1.1 函数 $f(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ は $\mathbb{D}$ で解析的で $a_0>0$ を満たすとする．このとき *Re* $f(z)>0$ が $\mathbb{D}$ で成り立てば，付随する *Hermite* 形式は $n=0,1,2,\ldots$ について非負である．

Proof. By (1.3) we have

$$\begin{aligned} H_n[w_0,\ldots,w_n] &= \sum_{k,\ell=0}^{n} a_{k-\ell}\overline{w_k}w_\ell \\ &= \sum_{k,\ell=0}^{n} \overline{w_k}w_\ell \int_{\partial\mathbb{D}} \zeta^{-i(k-\ell)\theta}\, d\mu(\zeta) \\ &= \int_{\partial\mathbb{D}} \sum_{k,\ell=0}^{n} \overline{w_k\zeta^k} w_\ell \zeta^\ell \, d\mu(\zeta) = \int_{\partial\mathbb{D}} \left| \sum_{k=0}^{n} w_k\zeta^k \right|^2 d\mu(\zeta) \geq 0. \qquad \square \end{aligned}$$

重要なのは Throem 1.1 の逆が成り立つことである．ここで次のことを注意しておこう．

非負 Hermite 形式の列 $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ については $H_k[w_0,\ldots,w_k]=H_m[w_0,\ldots,w_k,0,\ldots,0]$ であるから H_n が正値定符号ならば，$H_0,\ldots,H_{n-1}$ もそうである． 従ってある $n_0=1,2,\ldots$ について $H_0,\ldots,H_{n_0-1}$ が正値定符号であり，H_{n_0} 以降は正値定符号でないとなるか，または全ての n について H_n は正値定符号となるか，のどちらかが起こる．

Theorem 1.2 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を複素数列で $a_0>0$ を満たすとする．また $a_{-n}=\overline{a_n}$ と置いて対応する *Hermite* 形式 を $H_n[w_0,\ldots,w_n]=\sum_{k=0}^{n} a_{k-\ell}\overline{w}^k w^\ell$ で定義する．このとき全ての $n=0,1,2,\ldots$ について H_n が非負ならば，ベキ級数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

$\mathbb{D}$ で収束し解析的である．これを f と置けば $\mathbb{D}$ 上 $\mathrm{Re}\, f(z)>0$ を満たす．さらに $H_0,H_1,\ldots H_{n_0-1}$ が正値定符号で H_{n_0} が正値定符号でなければ

$$f(z)=\sum_{k=1}^{n_0} \frac{r_k}{2}\frac{1\zeta_k z}{1-\zeta_k z}$$

の形に表せる．ここに $r_k>0$, $k=1,\ldots,n_0$ であり，$\zeta_1,\ldots,\zeta_{n_0}\in\partial\mathbb{D}$ は相異なる．

Proof. はじめに $H_n[w_0,0,\ldots,0,w_n]=a_0|w_0|^2+a_{-n}\overline{w_0}w_n+a_n\overline{w_n}w_0+a_0|w_n|^2\geq 0$ より行列式 $a_0^2-|a_n|^2\geq 0$ が成り立つので $|a_n|\leq a_0$, $n=0,1,2,\ldots$ であるから $f(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の右辺のベキ級数は $\mathbb{D}$ で収束し解析的である．そこで $u(z)=\mathrm{Re}f(z)$ と置こう．

$0<\rho<1$ を満たす ρ を任意に取り固定しよう．このとき $f(\rho z)$ は $\overline{\mathbb{D}}$ で解析的であるから

$$f(\rho z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} u(\rho e^{i\theta})\, d\theta$$

が成り立つ．ここで

$$\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(ze^{-i\theta})^n$$

より

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\rho^n z^n=f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(\rho e^{i\theta})\,d\theta+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(\rho e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta\right)z^n$$

が成り立つ．係数を比較すると $a_n\rho^n=\pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}u(\rho e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta$ が成り立つことが分かるが, $a_{-n}=\overline{a_n}$ と定義したことを思い出せば

$$a_n\rho^{|n|}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(\rho e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta \tag{1.4}$$

が任意の　$n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ について成り立つことが分かる．従って

$$\begin{aligned}H_n^{(\rho)}[w_0,\ldots,w_n]&:=\sum_{k,\ell=0}^{n}a_{k-\ell}\rho^{|k-\ell|}\overline{w_k}w_\ell\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(\rho e^{i\theta})\sum_{k,\ell=0}^{n}e^{i(k-\ell)\theta}\overline{w_k}w_\ell\,d\theta=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(\rho e^{i\theta})\left|\sum_{k=0}^{n}e^{ik\theta}w_k\right|^2d\theta\end{aligned}$$

これが非負であることを示そう．$h(z)=\frac{1+z}{1-z}$ について

$$\frac{1+\rho z}{1-\rho z}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\mathrm{Re}h(\rho e^{i\theta})\,d\theta$$

が成り立つことより, 両辺を原点の周りで　Taylor 展開し

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n z^n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}\,h(\rho e^{i\theta})\,d\theta+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-in\theta}\,\mathrm{Re}\,h(\rho e^{i\theta})\,d\theta\right)z^n$$

係数を比較して,

$$\rho^{|n|}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-in\theta}\,\mathrm{Re}\,h(\rho e^{i\theta})\,d\theta$$

これを用いると

$$\begin{aligned}H_n^{(\rho)}[w_0,\ldots,w_n]&:=\sum_{k,\ell=0}^{n}a_{k-\ell}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(k-\ell)\theta}\,\mathrm{Re}h(\rho e^{i\theta})\,d\theta\right)\overline{w_k}w_\ell\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}\,h(\rho e^{i\theta})\sum_{k,\ell=0}^{n}a_{k-\ell}\overline{e^{ik\theta}w_k}e^{i\ell\theta}w_\ell\,d\theta\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}\,h(\rho e^{i\theta})H_n[w_0,e^{i\theta}w_1,\ldots,e^{in\theta}w_n]\,d\theta\end{aligned}$$

となり, $H_n[w_0, e^{i\theta}w_1, \dots, e^{in\theta}w_n] \geq 0$ と $\operatorname{Re} h(\rho e^{i\theta}) > 0$ を合わせて

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\rho e^{i\theta}) \left|\sum_{k=0}^{n} w_k e^{ik\theta}\right|^2 d\theta = H_n^{(\rho)}[w_0, \dots, w_n] \geq 0$$

を得る.

上の不等式は任意の $n \in \mathbb{N}$, $w_0, \dots, w_n \in \mathbb{D}$ について成り立つ. このことより $\mathbb{D}$ 上 $u(z) \geq 0$ が成り立つことを導くことができる. 実際 $z = re^{i\varphi}$ について

$$\begin{aligned}
u(\rho z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right) u(\rho e^{i\theta})\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{1-ze^{-i\theta}}{1+ze^{-i\theta}}\right) u(\rho e^{i\theta})\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{|1-re^{i(\varphi-\theta)}|^2} u(\rho e^{i\theta})\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{|1-re^{i(\theta-\varphi)}|^2} u(\rho e^{i\theta})\, d\theta \\
&= \frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{-in\varphi} e^{in\theta}\right|^2 u(\rho e^{i\theta})\, d\theta \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\rho e^{i\theta}) \left|\sum_{k=0}^{n} r^n e^{-ik\varphi} e^{ik\theta}\right|^2 d\theta \geq 0
\end{aligned}$$

である. これより $\rho \uparrow 1$ として $u(z) \geq 0$ が従う. さらに $u(0) = \frac{a_0}{2} > 0$ であったから, 最大値の原理より $\mathbb{D}$ 上 $u(z) > 0$ が成り立つ.

$\mathbb{D}$ 上 $\operatorname{Re} f(z) = u(z) > 0$ が成り立つことより Theorem 1.1 の証明中のように $\partial\mathbb{D}$ 上の Borel measure μ により

$$f(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, d\mu(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}.$$

$$H_n[w_0, \dots, w_n] = \int_{\partial\mathbb{D}} \left|\sum_{k=0}^{n} w_k \zeta^k\right|^2 d\mu(\zeta)$$

と表現できる. ここで $H_0, H_1, \dots, H_{n_0-1}$ が正値定符号で H_{n_0} が正値定符号でないと仮定しよう. このとき $(b_0, \dots b_{n_0}) \in \mathbb{C}^{n_0+1} \backslash \{(0, \dots, 0)\}$ で $H_{n_0}[b_0, \dots b_{n_0}] = 0$ となるものが存在する. (もし $b_{n_0} = 0$ ならば $0 = H_{n_0}[b_0, \dots, b_{n_0-1}, b_{n_0}] = H_{n_0-1}[b_0, \dots, b_{n_0-1}]$ となり H_{n_0-1} の正値定符号性に反するので $b_{n_0} \neq 0$ が成り立つ.) 従って $g(z) = \sum_{k=0}^{n_0} b_k z^k$ と置けばこれは

$$\int_{\partial\mathbb{D}} |g(\zeta)|^2\, d\mu(\zeta) = \int_{\partial\mathbb{D}} \left|\sum_{k=0}^{n_0} b_k \zeta^k\right|^2 d\mu(\zeta) = H_{n_0}[b_0, \dots b_{n_0}] = 0$$

を意味する. よって $g(z)$ の $\partial\mathbb{D}$ 上の相異なる零点を $\zeta_1, \dots, \zeta_j$ と置けば, μ はこれらの零点上にのみ mass を持つ. 点 a に単位質量を持つ Dirac 測度 を δ_a で表すことにすれば

$$\mu = \sum_{k=1}^{j} \frac{r_k}{2}\delta_{\zeta_k},$$

但し $r_1, \dots, r_j \geq 0$ と表せる. ここで $j = n_0$ かつ $r_1, \dots, r_j > 0$ となることを示せば証明は完了する.

そこで $j \leq n_0 - 1$, $r_1, \dots, r_{n_0} > 0$ と仮定して矛盾を導く. このとき $\tilde{g}(z) = (z-\zeta_1)\cdots(z-\zeta_j) = \sum_{k=0}^{j} \tilde{b}_k z^k$ と置けば, $\tilde{g}(\zeta_1) = \cdots = \tilde{g}(\zeta_j) = 0$ と μ の表示より

$$\int_{\partial\mathbb{D}} |\tilde{g}(\zeta)|^2 \, d\mu(\zeta) = \int_{\partial\mathbb{D}} \left| \sum_{k=0}^{j} \tilde{b}_k \zeta^k \right|^2 d\mu(\zeta) = H_j[\tilde{b}_0, \dots, \tilde{b}_j] = 0$$

が成り立つ. 明らかに $(\tilde{b}_0, \dots, \tilde{b}_j) \neq (0, \dots, 0)$ であるから, これは H_j が正値定符号であることに反する. $\square$

さて $a_0 > 0$ を満たす複素数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ について $a_{-n} = \overline{a_n}$ と置き, 行列式 δ_n, $n = 0, 1, 2, \dots$ を

$$\delta_n = \delta(a_0, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-n} & a_{-n+1} & a_{-n+2} & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \overline{a_1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \overline{a_{-2}} & \overline{a_1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_n} & \overline{a_{n-1}} & \overline{a_{n-2}} & \cdots & a_0 \end{vmatrix}$$

と置けば,

(1.5) $$H_n \text{ が非負} \iff \delta_0 \geq 0, \dots, \delta_n \geq 0$$

であり

(1.6) $$H_n \text{ が正値定符号} \iff \delta_0 > 0, \dots, \delta_n > 0$$

である. 従って Theorem 1.1 と Theorem 1.2 をまとめると次のようになる.

Theorem 1.3 $a_0 > 0$ を満たす複素数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ についてベキ級数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ が $\mathbb{D}$ で収束して実部が正の解析函数となるための必要十分条件は次の 2 条件のうちどちらかが成り立つこと.

(i) $\delta(a_0, \dots, a_n) > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$

(ii) ある $n_0 \in \mathbb{N}$ について $\delta(a_0) > 0, \dots, \delta(a_0, \dots, a_{n_0-1}) > 0$, $\delta(a_0, \dots, a_{n_0}) = \delta(a_0, \dots, a_{n_0+1}) = \cdots = 0$.

(ii) の場合

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n_0} \frac{r_k}{2} \frac{\zeta_k + z}{\zeta_k - z}$$

の形に表せる. ここに $r_k > 0$, $k = 1, \dots, n_0$ であり, $\zeta_1, \dots, \zeta_{n_0} \in \partial\mathbb{D}$ は相異なる.

2　$\mathcal{P}_1$ の係数体

単位円板上で解析的な函数 f で $\mathrm{Re}\, f(z) > 0,\ f(0) > 0$ を満たすもの全てがなす族を $\mathcal{P}$ と置いたことを思い出しておこう．函数族 $\mathcal{P}$ は compact で無いので,

$$\mathcal{P}_1 = \{f \in \mathcal{P} : f(0) = 1\}$$

と置こう．$f \in \mathcal{P}_1$ については $a_0 = 2$ であることに注意しておこう．

さて $f \in \mathcal{P}_1$ について $|f(z)| \le \frac{1+|z|}{1-|z|}$ が成り立つので $\mathcal{P}_1$ は正規族である．また $\mathcal{P}_1$ の列 $\{f_n\}$ の広義一様収束極限を f とすれば, $\mathrm{Re}\, f(z) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\, f_n(z) \ge$ と $f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1$ より $f \in \mathcal{P}_1$ である．従って $\mathbb{D}$ 上の解析函数の全体がなす族 $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ に広義一様収束の位相を入れた時 $\mathcal{P}_1$ は, その閉部分集合である．$\mathcal{A}(\mathbb{D})$ は距離空間ゆえ正規 (= precompact) かつ閉集合は compact である．

このとき $n \in \mathbb{N}$ について係数体と呼ばれる集合 $\mathcal{R}_n \subset \mathbb{C}^n$ を

$$\mathcal{R}_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n : \exists f \in \mathcal{P} \text{ such that } f(z) = 1 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots\} \tag{2.1}$$

で定義する．Thorem 1.3 は謂わば $\mathcal{R}_\infty$ の表現定理と言って差し支えないが, 有限項で打ち切った $\mathcal{R}_n$ についても同様な定理が成り立つ．

Theorem 2.1 各 $n \in \mathbb{N}$ について係数体 $\mathcal{R}_n$ は $\mathbb{C}^n$ の *compact* かつ *convex* な部分集合であり

$$\mathcal{R}_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n : \delta(2, a_1) \ge 0, \ldots, \delta(a_0, \ldots, a_n) \ge 0\}$$

と表現できる． また $(a_1, \ldots, a_n) \in \partial\mathcal{R}_n$ の必要十分条件はある $n_0 \le n$ について $\delta(2, a_1) > 0, \ldots, \delta(2, a_1, \ldots, a_{n_0-1}) > 0,\ \delta(2, a_1, \ldots, a_{n_0}) = \cdots = \delta(2, a_1, \ldots, a_n) = 0$ が成り立つことであり, このとき $f(z) = 1 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$ を満たす $f \in \mathcal{P}_1$ は一意的で

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n_0} \frac{r_k}{2} \frac{\zeta_k + z}{\zeta_k - z}$$

と表せる．但し $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n_0} \in \partial\mathbb{D}$ は相異なり, n_0 次代数方程式

$$F_{n_0}(z) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n_0-1} & a_{n_0} \\ \overline{a_1} & a_0 & \cdots & a_{n_0-2} & a_{n_0-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{a_{n_0-1}} & \overline{a_{n_0-2}} & \cdots & a_0 & a_1 \\ 1 & z & \cdots & z^{n_0-1} & z^{n_0} \end{pmatrix} = \delta(a_0, \ldots, a_{n_0}) z^{n_0} + \cdots = 0 \tag{2.2}$$

の根であり, $r_k > 0,\ k = 1, \ldots, n_0$ は連立方程式

$$\begin{aligned} a_0 &= r_1 + \cdots + r_{n_0} \\ a_1 &= r_1\zeta_1 + \cdots + r_{n_0}\zeta_{n_0} \\ &\cdots \\ a_{n_0-1} &= r_1\zeta_1^{n_0-1} + \cdots + r_{n_0}\zeta_{n_0}^{n_0-1} \end{aligned}$$

の根である．特に $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n_0} \in \partial\mathbb{D},\ r_1, \ldots, r_{n_0} > 0$ は $a_0, \cdots, a_{n_0}$ により一意に定まる．

注意 $F_{n_0}(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_{n_0} z^{n_0}$ と置く時 $H_{n_0}[b_0, b_1, \ldots, b_{n_0}] = 0$ である.

Proof. $\mathcal{R}_n$ の凸性と compact 性は $\mathcal{P}_1$ の凸性と compact 性から導かれる.

$$\tilde{\mathcal{R}}_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n : \delta(2, a_1) \geq 0, \ldots, \delta(a_0, \ldots, a_n) \geq 0\}$$

と置く. $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{R}_n$ について $f(z) = 1 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$ を満たす $f \in \mathcal{P}_1$ と取れば Hermite 形式 $H_n[w_0, w_1, \ldots, w_n]$ は非負ゆえ, $\delta(2, a_1) \geq 0, \ldots, \delta(a_0, \ldots, a_n) \geq 0$ が成り立つ. 従って $(a_1, \ldots, a_n) \in \tilde{\mathcal{R}}_n$ であり, $\mathcal{R}_n \subset \tilde{\mathcal{R}}_n$ が成り立つ.

ここで $\delta(2, a_1, \ldots, a_k) = 0$ となれば, 対応する Hermite 形式 $H_k[w_0, \ldots, w_k]$ が正値定符号でなくなるのでそれ以降 $H_n[w_0, \ldots, w_n]$ まで正値定符号でない. 従って $a \in \tilde{\mathcal{R}}_n$ については

(I)
$$\delta(2, a_1) > 0, \ldots, \delta(2, a_1, \ldots, a_n) > 0$$

(II) ある $k \leq n$ について
$$\delta(2, a_1) > 0, \ldots, \delta(2, a_1, \ldots, a_{k-1}) > 0, \delta(2, a_1, \ldots, a_k) = \cdots = \delta(2, a_1, \ldots, a_n) = 0$$

のどちらか一方のみが起こる. $\tilde{\mathcal{R}}_n$ の定義と $\delta(2, a_1, \ldots, a_j)$ の $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ に関する連続性より $\mathbf{a}$ が $\tilde{\mathcal{R}}_n$ の内点であることの必要十分条件は (I) が起こることであり, $\mathbf{a}$ が $\tilde{\mathcal{R}}_n$ の境界点であることの必要十分条件は (II) が起こることである.

包含関係 $\tilde{\mathcal{R}}_n \subset \mathcal{R}_n$ を示すには任意の $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \tilde{\mathcal{R}}_n$ について $f(z) = 1 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$ を満たす $f \in \mathcal{P}_1$ の存在を示す必要がある. はじめに $\mathbf{a} \in \operatorname{Int} \tilde{\mathcal{R}}_n$, つまり (I) が起こる場合を考えよう.

$$F(z) = \delta(2, a_1, \ldots, a_n z) = \begin{vmatrix} 2 & a_1 & \cdots & a_n & z \\ \overline{a_1} & 2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{a_n} & \overline{a_{n-1}} & \cdots & 2 & a_1 \\ \overline{z} & \overline{a_n} & \cdots & \overline{a_1} & 2 \end{vmatrix}$$

と置くと, 第 1 行を $(2, a_1, \ldots, a_n, 0)$ と $(0, 0, \ldots, 0, z)$ に分解して行列式を展開しさらに展開してで

きた 2 つの行列式 の第 1 列を同じように展開すれば

$$F(z) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & z \\ \overline{a_1} & 2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{a_n} & \overline{a_{n-1}} & \cdots & 2 & a_1 \\ \overline{z} & \overline{a_n} & \cdots & \overline{a_1} & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & a_1 & \cdots & a_n & 0 \\ \overline{a_1} & 2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{a_n} & \overline{a_{n-1}} & \cdots & 2 & a_1 \\ \overline{z} & \overline{a_n} & \cdots & \overline{a_1} & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & z \\ 0 & 2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \overline{a_{n-1}} & \cdots & 2 & a_1 \\ \overline{z} & \overline{a_n} & \cdots & \overline{a_1} & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & z \\ \overline{a_1} & 2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{a_n} & \overline{a_{n-1}} & \cdots & 2 & a_1 \\ 0 & \overline{a_n} & \cdots & \overline{a_1} & 2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_n & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \overline{a_{n-1}} & \cdots & 2 & a_1 \\ \overline{z} & \overline{a_n} & \cdots & \overline{a_1} & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & a_1 & \cdots & a_n & 0 \\ \overline{a_1} & 2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{a_n} & \overline{a_{n-1}} & \cdots & 2 & a_1 \\ 0 & \overline{a_n} & \cdots & \overline{a_1} & 2 \end{vmatrix}$$

$$= A|z|^2 + B_1 z + B_2 \overline{z} + C \quad (say)$$

このとき

$$A = -\begin{vmatrix} 2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{n-1}} & \cdots & 2 \end{vmatrix} = \delta(2, a_1, \ldots . a_{n-1})$$

$$B_1 = (-1)^{n+3} \begin{vmatrix} \overline{a_1} & 2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_n} & \overline{a_{n-1}} & \cdots & 2 \\ 0 & \overline{a_n} & \cdots & \overline{a_1} \end{vmatrix}, \quad B_2 = (-1)^{n+3} \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_n & 0 \\ 2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{a_{n-1}} & \cdots & 2 & a_1 \end{vmatrix}$$

であるから, $B_2 = \overline{B_1}$ が分かる. そして C に対応する $n+2$ 次の行列を D とおいて Jacobi の等式 (4.3) を適用すれば D_{11}, $D_{1,n+2}$, $D_{n+2,1}$ $D_{n+2,n+2}$ を余因子として

$$D_{11} D_{n+2,n+2} - D_{1,n+2} D_{n+2,1} = |D| \begin{vmatrix} 2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{n-1}} & \cdots & 2 \end{vmatrix} = -CA \tag{2.3}$$

一方

$$D_{1,1} = \begin{vmatrix} 2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{a_{n-1}} & \cdots & 2 & a_1 \\ \overline{a_n} & \cdots & \overline{a_1} & 2 \end{vmatrix} = \delta(2, a_1, \ldots, a_n) = D_{n+2,n+2}$$

また
$$D_{1,n+2} = (-1)^{n+3}B_1, D_{n+2,1} = (-1)^{n+3}B_2$$
であるから (2.3) より $\delta(2, a_1, \ldots, a_n)^2 - B_1B_2 = -AC$ を得る．以上より
$$F(z) = A|z|^2 + B_1 z + B_2\overline{z} + C$$
において $B_2 = \overline{B_1}$ であり, $B_1B_2 - AC = \delta(2, a_1, \ldots, a_n)^2$ である．従って $F(z) = 0$ は複素平面内の (退化しない) 円周を表し, $F(z) = 0$ を満たす点が存在する．これを a_{n+1} と置けば $\delta(2, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) = F(a_{n+1}) = 0$ より $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in \partial\tilde{\mathcal{R}}_{n+1}$ である．特に
$$\begin{vmatrix} 2 & a_{n+1} \\ \overline{a_{n+1}} & 2 \end{vmatrix} \geq 0$$
より $|a_{n+1}| \leq 2$ に注意する．

これで $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \operatorname{Int}\tilde{\mathcal{R}}_n$ の時に $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in \partial\tilde{\mathcal{R}}_{n+1}$ を満たす a_{n+1} の存在が示された．$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \partial\tilde{\mathcal{R}}_n$ の場合でも $\mathbf{a}$ の任意の近傍に内点 $\mathbf{a}' \in \operatorname{Int}\tilde{\mathcal{R}}_n$ をを取り, $\mathbf{a}'$ に対応して a'_{n+1} を $(a'_1, \ldots, a'_n, a'_{n+1}) \in \partial\tilde{\mathcal{R}}_{n+1}$ を満たすように取る．このとき $|a'_{n+1}| \leq 2$ より適当な点列に沿って $\mathbf{a}' \to \mathbf{a}$ とするとき a'_{n+1} が収束するようにできる．この極限を a_{n+1} と置けば連続性より $\delta(2, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) = 0$ つまり $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in \partial\tilde{\mathcal{R}}_{n+1}$ である．

上の議論を繰り返せば結局 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \tilde{\mathcal{R}}_n$ について $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ を $\delta(2, a_1, \ldots, a_k) \geq 0$ が任意の $k \in \mathbb{N}$ について成り立つように取れる．このとき Theorem 1.3 より $f \in \mathcal{P}_1$ で $f(z) = 1 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$ を満たすものが存在する．従って $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{R}_n$ が成り立ち, $\mathcal{R}_n \subset \tilde{\mathcal{R}}_n$ が示された．

それでは定理の後半部分を示すために $\delta(2, a_1) > 0, \ldots, \delta(2, a_1, \ldots, a_{n_0-1}) > 0, \delta(2, a_1, \ldots, a_{n_0}) = \cdots = \delta(2, a_1, \ldots, a_n) = 0$ が成り立つと仮定しよう．このとき対応する $f \in \mathcal{P}_1$ を取れば $H_1, \ldots, H_{n_0-1}$ は正値定符号で, H_{n_0} はそうでないので Theorem 1.3 より
$$f(z) = \sum_{k=0}^{n_0} \frac{r_k}{2} \frac{\zeta_k + z}{\zeta_k - z}$$
と表せる．右辺を 原点のまわりで Tayloer 展開すれば

$$a_j = \sum_{k=0}^{n_0} r_k \zeta_k^{-j}, j = 1, 2, \ldots \tag{2.4}$$

が成り立つことが分かる．少々天下り的であるが
$$F_{n_0}(z) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n_0-1} & a_{n_0} \\ \overline{a_1} & a_0 & \cdots & a_{n_0-2} & a_{n_0-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{a_{n_0-1}} & \overline{a_{n_0-2}} & \cdots & a_0 & a_1 \\ 1 & z & \cdots & z^{n_0-1} & z^{n_0} \end{pmatrix}$$

と置けば, (2.4) より

$$F_{n_0}(z) = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_{n_0} & 0 \\ r_1\zeta_1 & r_2\zeta_2 & \cdots & r_{n_0}\zeta_{n_0} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_1\zeta_1^{n_0-1} & r_2\zeta_2^{n_0-1} & \cdots & r_{n_0}^{n_0-1}\zeta_{n_0} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \zeta_1^{-1} & \cdots & \zeta_1^{-n_0} \\ 1 & \zeta_2^{-1} & \cdots & \zeta_2^{-n_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta_{n_0}^{-1} & \cdots & \zeta_{n_0}^{-n_0} \\ 1 & z & \cdots & z^{n_0} \end{vmatrix}$$

と表せるので $\zeta_1^{-1}, \ldots, \zeta_{n_0}^{-1}$ が $F_k(z) = 0$ の零点であり, $a_1, \ldots, a_{n_0}$ により一意的に定まる. そして $\zeta_1^{-1}, \ldots, \zeta_{n_0}^{-1}$ が定まっていれば $r_1, \ldots, r_{n_0}$ は $a_j = \sum_{k=0}^{n_0} r_k\zeta_k^{-j}$, $j = 1, \ldots, n_0$ の解ゆえ, やはり一意的に定まる. □

3 Schur の定理

数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ について

(3.1)
$$A_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & a_0 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}, \quad A_n^* = {}^t\overline{A_n} = \begin{pmatrix} \overline{a_0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \overline{a_1} & \overline{a_0} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \overline{a_n} & \overline{a_{n-1}} & \overline{a_{n-2}} & \cdots & \overline{a_0} \end{pmatrix}$$

と置く. そして I_n で n 次単位行列を表すとし $2n+1$ 次の行列式 γ_n を

(3.2)
$$\gamma_n = \gamma(a_0, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} I_n & A_n \\ A_n^* & I_n \end{vmatrix}$$

で定義する.

Theorem 3.1 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対してベキ級数を $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ と置けばこのベキ級数が $\mathbb{D}$ で収束して $|f(z)| \leq 1$ を満たすための必要十分条件は次の 2 条件のどちらかが成り立つこと.

(i)
$$\gamma_n > 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, \ldots$$

(ii) ある番号 k について
$$\gamma_0 > 0, \ldots, \gamma_{k-1} > 0,\ \gamma_k = \gamma_{k+1} = \cdots = 0$$

特に (ii) が成り立つとき f は k 次の *Blaschke* 積, つまり

$$f(z) = \varepsilon \Pi_{\ell=1}^{k} \frac{z - \alpha_\ell}{1 - \overline{\alpha_\ell} z}$$

但し $\varepsilon \in \partial\mathbb{D}$, $\alpha_\ell \in \mathbb{D}$, $\ell = 1, \ldots, k$ と表せる.

Proof. $\mathbb{D}$ 上の解析函数 $f \neq 1$ で $|f(z)| < 1$ を満たすものを任意に取る. そして

$$F(z) = \frac{1+f(z)}{1-f(z)} = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

と置く. このとき F は $\mathbb{D}$ で解析的で $\mathrm{Re}\, F(z) \geq 0$ を満たす. 逆に $\mathbb{D}$ 上の解析函数 F で rm $\mathrm{Re}\, F(z) \geq 0$ を満たすものについて

$$f(z) = \frac{F(z)-1}{F(z)+1}$$

と置けば $\mathbb{D}$ で解析的で $|f(z)| \leq 1$ を満たす.

次に

$$1 + f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$$
$$1 - f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n$$

と置き, $\{a_n\}$ から A_n を定義したように

$$C_n = \begin{pmatrix} \frac{c_0}{2} & c_1 & \cdots & c_n \\ 0 & \frac{c_0}{2} & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{c_0}{2} \end{pmatrix}, \quad P_n = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_n \\ 0 & p_0 & \cdots & p_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_0 \end{pmatrix}, \quad Q_n = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & \cdots & q_n \\ 0 & q_0 & \cdots & q_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_0 \end{pmatrix}$$

と置く. このとき $1 + f(z) = (1 - f(z))F(z)$ より

$$P_n = C_n Q_n \implies C_n = P_n Q_n^{-1} \implies C_n^* = (Q_n^*)^{-1} P_n^*$$

従って

$$H_n := C_n + C_n^* = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ \overline{c_0} & \mathrm{Re}\, c_0 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{c_n} & \overline{c_{n-1}} & \cdots & \mathrm{Re}\, c_0 \end{pmatrix}$$

であり, 両辺の行列式を取れば

$$H_n = \delta(\mathrm{Re}\, c_0, c_1, \cdots, c_n)$$

が成り立つ. $H_n = C_n + C_n^* = P_n Q_n^{-1} + (Q_n^*)^{-1} P_n^*$ より

$$Q_n^* H_n Q_n = Q_n^* P_n + P_n^* Q_n.$$

次に $1 + f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$, $1 - f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n$ より $P_n = I_n + A_n$, $Q_n = I_n - A_n$ であるから上式と合わせて

$$\begin{aligned} Q_n^* H_n Q_n &= (I_n - A_n)^*(I_n + A_n) + (I_n + A_n)^*(I_n - A_n) \\ &= (I_n - A_n^*)(I_n + A_n) + (I_n + A_n^*)(I_n - A_n) \\ &= 2\{I_n - A_n^* A_n\} \end{aligned}$$

右辺は $n+1$ 次の行列であり, $|Q_n| = (1-a_0)^{n+1}$, $|Q_n^*| = \overline{(1-a_0)}^{n+1}$ である. 従って行列式に関する Schur の補題 (Theorem 5.1) より

$$\begin{aligned}|1-a_0|^{2(n+1)}|H_n| &= 2^{n+1}|I_n - A_n^* A_n| \\ &= 2^{n+1}\begin{vmatrix} I_n & A_n \\ A_n^* & I_n \end{vmatrix} = 2^{n+1}\gamma(a_0, a_1, \ldots, a_n)\end{aligned}$$

が成り立つ. よって

$$\delta(\operatorname{Re} c_0, c_1, \ldots, c_n) = \frac{2^{n+1}}{|1-a_0|^{n+1}}\gamma(a_0, a_1, \ldots, a_n) \tag{3.3}$$

が成り立つ. よって Theorem の前半の主張は, Carathéodry の定理 (Theorem 1.3) より直ちに従う.

後半の部分についてはもし f が $\gamma_0 > 0, \ldots, \gamma_{k-1} > 0$, $\gamma_k = \gamma_{k+1} = \cdots = 0$ を満たせば対応する F は

$$\delta(\operatorname{Re} c_0) > 0, \ldots, \delta(\operatorname{Re} c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}) > 0,\ \delta(\operatorname{Re} c_0, c_1, \ldots, c_k) = \delta(\operatorname{Re} c_0, c_1, \ldots, c_{k+1}) = \cdots = 0,$$

を満たすので, ある $c = \operatorname{Im} c_0$ と置けば

$$F(z) = ic + \sum_{\ell=1}^{k} \frac{r_\ell}{2}\frac{\zeta_\ell + z}{\zeta_\ell - z}$$

と表せ, k 次の有理函数である. ここに $r_\ell > 0$, $\ell = 1, \ldots, k$ であり, $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ は相異なる. このとき $\partial\mathbb{D}$ 上, $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ を除いて $\operatorname{Re} F(z) = 0$ であるから有理函数 $f(z) = \frac{F(z)-1}{F(z)+1}$ は $\partial\mathbb{D}$ 上 $|f(z)| = 1$ を満たす. $f(z)$ の零点は $F(z) = 1$ となる点に対応するが $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$ で $\operatorname{Re} F(z) < 0$, また $\mathbb{D}$ で $\operatorname{Re} F(z) > 0$ であるからこのような点は $\mathbb{D}$ 内に k 個存在する. 以上より f は k 次の Blaschke 積である. $\square$

4 行列式の展開に関する Jacobi の公式

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の第 (i, j) 余因子を Δ_{ij} と置き, $\mathbf{A} = (\Delta_{ij})$ と置くと $A^t\mathbf{A} = |A|I$ が成り立つ. 但し I は n 次単位行列である. これは

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

または

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{jk} = \delta_{ij}|A| \tag{4.2}$$

と表せる.

(4.1) の両辺の行列式を取れば

$$|A||{}^t\mathbf{A}| = |A|^n$$

が成り立つ. よって

$$|{}^t\mathbf{A}| = |A|^{n-1}$$

が成り立つ.

(4.2) より

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \Delta_{r+11} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \Delta_{r+1r} & \cdots & \Delta_{nr} \\ 0 & \cdots & 0 & \Delta_{r+1r+1} & \cdots & \Delta_{nr+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \Delta_{r+1n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{r+11} & \cdots & a_{r+1r} & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}$$

を得る. この両辺の行列式を取ると

$$|A| \begin{vmatrix} \Delta_{r+1r+1} & \cdots & \Delta_{nr+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{r+1n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} |A|^{n-r}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} \Delta_{r+1r+1} & \cdots & \Delta_{nr+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{r+1n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} |A|^{n-r-1}$$

を得る. 特に $r = n-2$ の場合

$$\Delta_{n-1n-1}\Delta_{nn} - \Delta_{n-1n}\Delta_{nn-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-21} & \cdots & a_{n-2n-2} \end{vmatrix} |A|$$

を Jacobi の公式と言う.

Carathéodory の定理の証明中で用いられるのは, これと少し形が異なるので念のために導いて

おこう.

$$
\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{n-2,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\Delta_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & \Delta_{n-1,1} \\
\Delta_{1,2} & 1 & \cdots & 0 & \Delta_{n-1,2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\Delta_{1,n-1} & 0 & \cdots & 1 & \Delta_{n-1,n-1} \\
\Delta_{1,n} & 0 & \cdots & 0 & \Delta_{n-1,n}
\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
|A| & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\
0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\
0 & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & |A|
\end{pmatrix}
$$

両辺の行列式を取ると (左辺の 2 つ目の行列式と右辺の行列式をともに 1 列で展開せよ)

$$
|A|\Delta_{11}\left\{\begin{vmatrix}
1 & \cdots & 0 & \Delta_{n,2} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & \Delta_{n,n-1} \\
0 & \cdots & 0 & \Delta_{n,n}
\end{vmatrix} + (-1)^{n+1}\Delta_{n1}\begin{vmatrix}
\Delta_{1,2} & 1 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots \\
\Delta_{1,n-1} & 0 & 1 \\
\Delta_{1,n} & 0 & 0
\end{vmatrix}\right\} = |A|\begin{vmatrix}
a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \\
a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\
a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & |A|
\end{vmatrix}
$$

$$
\therefore |A|\{\Delta_{1,1}\Delta_{n,n} - \Delta_{n,1}\Delta_{1,n}\} = |A|^2\begin{vmatrix}
a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1}
\end{vmatrix}
$$

以上より $A=(a_{i,j})$ について Δ_{ij} を 第 (i,j) 余因子として

$$
\Delta_{1,1}\Delta_{n,n} - \Delta_{n,1}\Delta_{1,n} = |A|\begin{vmatrix}
a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1}
\end{vmatrix} \tag{4.3}
$$

が成り立つ.

5　行列式に関する Schur の補題

Theorem 5.1 P,Q,R,S を n 次正方行列とし $PR=RP$ が成り立つとする. このとき

$$
M=\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}
$$

と置く時

$$
|M| = |PS-RQ|
$$

が成り立つ.

Proof. $|P| \neq 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} P^{-1} & O \\ -RP^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & p^{-1}Q \\ O & S - RP^{-1}Q \end{pmatrix}$$

が成り立つので両辺の行列式を取り $|P^{=1}||M| = |S - RP^{-1}Q|$ が成り立つ. 従って

$$|M| = |P||S - RP^{-1}Q| = |PS - PRP^{-1}Q| = |PS - RQ|$$

が成り立つ.

$|P| = 0$ の時は t について $f(t) = |P + tI| = t^n + \not\equiv 0$ と置くと $f(0) = |P| = 0$ より $f(t) \neq 0$ を満たす t でいくらでも小さいものが取れる. このような t について

$$M_t = \begin{pmatrix} P + tI & Q \\ R & S \end{pmatrix}$$

と置けば $(P + tI)R = PR + tR = RP + tR = R(P + tI)$ より, 前に示したことより $|M_t| = |(P + tI)S - RQ|$ が成り立つ. ここで $t \to 0$ とすれば $|M| = |PS - RQ|$ が成り立つ. □

6 Fejér の非負三角級数の因数分解定理

元々, 辻先生の本での Carathéodory の定理の証明は非負有限三角級数の因数分解についての Fejér の定理を用いるものであったが, よくよく考えたら Poisson 核にのみ Fejér の定理を用いれば良いことが分かり, この場合は具体的に因数分解が行えるので不要となった. とはいうものの Fejér の定理自体は面白い定理なのでここで, その内容と証明を紹介しておく.

Theorem 6.1 (Fejér) 有限実三角級数

$$\tau(\theta) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} \{\lambda_k \cos k\theta + \mu_k \sin k\theta\}$$

が $\tau(\theta) \geq 0,\ \theta \in [-\pi, \pi]$ を満たせば,

$$\tau(\theta) = |\gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots + \gamma_n z^n|^2, \quad \theta \in [-\pi, \pi]$$

の形に表せる. ただし $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ は複素定数である.

Proof. まず

$$\cos k\theta = \frac{e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}}{2}, \quad \sin k\theta = \frac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i}$$

より

$$\begin{aligned} \tau(\theta) &= \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} + \left\{ \lambda_k \frac{e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}}{2} + \mu_k \frac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i} \right\} \\ &= \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\lambda_k - i\mu_k}{2} e^{ik\theta} + \frac{\lambda_k + i\mu_k}{2} e^{-ik\theta} \right\} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
e^{in\theta}\tau(\theta) &= \lambda_0 e^{in\theta} + \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\lambda_k - i\mu_k}{2}e^{i(n+k)\theta} + \frac{\lambda_k + i\mu_k}{2}e^{i(n-k)\theta}\right\} \\
&= \frac{\lambda_n + i\mu_n}{2} + \cdots + \frac{\lambda_1 + i\mu_1}{2}e^{i(n-1)\theta} \\
&+ \lambda_0 e^{in\theta} \\
&+ \frac{\lambda_1 - i\mu_1}{2}e^{i(n+1)\theta} + \cdots + \frac{\lambda_n - i\mu_n}{2}e^{i2n\theta}
\end{aligned}$$

そこで

$$\begin{aligned}
&c_0 = \frac{\lambda_n + i\mu_n}{2}, \ldots, c_{n-1} = \frac{\lambda_1 + i\mu_1}{2} \\
&c_n = \lambda_0 \\
&c_{n+1} = \frac{\lambda_1 - i\mu_1}{2}, \ldots, c_{2n} = \frac{\lambda_n - i\mu_n}{2}
\end{aligned}$$

と置き, さらに

$$G(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1}z^{n-1} + c_n z^n + c_{n+1}z^{n+1} + \cdots + c_{2n}z^{2n}$$

と置けば

$$e^{in\theta}\tau(\theta) = c_0 + c_1 e^{i\theta} + \cdots + c_{n-1}e^{i(n-1)\theta} + c_n e^{in\theta} + c_{n+1}e^{i(n+1)\theta} + \cdots + c_{2n}e^{i2n\theta} = G(e^{i\theta}) \tag{6.1}$$

が成り立つ. また $c_{2n-k} = \overline{c_k}$ より

$$z^{2n}\overline{G\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} = G(z) \tag{6.2}$$

が成り立つ.

まず (6.2) より $z_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ が G の k 位の零点ならば $\frac{1}{\overline{z_0}}$ も G の k 位の零点になることが従う. 実際 $z_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ が G の k 位の零点ならば

$$G(z) = (z - z_0)^k g(z)$$

を満たす多項式 g で $g(z_0) \neq 0$ であるものが存在する. これより

$$\begin{aligned}
\overline{G\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} &= \overline{\left(\frac{1}{\overline{z}} - z_0\right)^k}\,\overline{g\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} \\
&= (-1)^k\left(\frac{\overline{z_0}}{z}\right)^k\overline{\left(z - \frac{1}{\overline{z_0}}\right)^k}\,\overline{g\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}
\end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned}
G(z) &= z^{2n}\overline{G\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} \\
&= (-1)^k\overline{z_0}^k\left(z - \frac{1}{\overline{z_0}}\right)^k z^{2n-k}\overline{g\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}
\end{aligned}$$

となるが,

$$\tilde{g}(z) = (-1)^k \overline{z_0}^k z^{2n-k} \overline{g\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}$$

と置くと

$$G(z) = \left(z - \frac{1}{\overline{z_0}}\right)^k \tilde{g}(z)$$

となるが, ここで $\tilde{g}$ は $2n-k$ 次の多項式で, $\tilde{g}\left(\frac{1}{\overline{z_0}}\right) \neq 0$ であることより, $\frac{1}{\overline{z_0}}$ も G の k 位の零点である.

次に $\tau(\theta)$ が非負であることから $\partial\mathbb{D}$ 上にある G の零点の位数が偶数であることを示そう. $\zeta_0 = e^{i\theta_0}$, $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ を G の k 位の零点とすれば

$$G(z) = (z - \zeta_0)^k g(z)$$

を満たす多項式 g で $g(\zeta_0) \neq 0$ であるものが存在する. このとき ζ_0 $e^{i\theta_0}$ と上式より

$$\begin{aligned}
\tau(\theta) &= e^{-in\theta} G(e^{i\theta}) \\
&= e^{-in\theta}(e^{i\theta} - e^{i\theta_0})^k g(e^{i\theta}) \\
&= (\theta - \theta_0)^k e^{-in\theta} \left(\frac{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}}{\theta - \theta_0}\right)^k g(e^{i\theta}) \\
&= (\theta - \theta_0)^k h(\theta) \quad \text{(say)}
\end{aligned}$$

となり, $h(\theta_0) = e^{-in\theta_0}(ie^{i\theta_0})^k g(e^{i\theta_0}) \neq 0$ である. 特に k が奇数ならば $\tau(\theta)$ は θ_0 の任意の近傍で正と負の値の両方を取る. これは $\tau(\theta) \geq 0$ という仮定に反する. 従って k は偶数である.

以上より

$$G(z) = z^{2\ell} \Pi_{k=1}^s (z - z_k)^{p_k} \left(z - \frac{1}{\overline{z_k}}\right)^{p_k} \Pi_{k=1}^t (z - \zeta_k)^{2q_k} \tag{6.3}$$

の形に表せる. 但し ℓ, s, t は非負整数, $p_1, \ldots, p_s, q_1, \ldots, q_t$ は自然数で $\ell + p_1 + \cdots + p_s + q_1 + \cdots + q_t = n$ を満たし $z_1, \ldots, z_s \in \mathbb{D} \backslash \{0\}$, $\zeta_1, \ldots, \zeta_t \in \partial\mathbb{D}$ は全て相異なるとする. ここで

$$G_0(z) = \Pi_{k=1}^s (z - z_k)^{p_k} \Pi_{k=1}^t (z - \zeta_k)^{q_k}$$

と置けば

$$\begin{gathered}
(e^{i\theta} - z_k)\left(e^{i\theta} - \frac{1}{\overline{z_k}}\right) = \frac{e^{i\theta}}{\overline{z_k}}(e^{i\theta} - z_k)(\overline{z_k} - e^{-i\theta}) = -\frac{e^{i\theta}}{\overline{z_k}}|e^{i\theta} - z_k|^2, \\
(e^{i\theta} - \zeta_k) = -\frac{e^{i\theta}}{\overline{\zeta_k}}|e^{i\theta} - \zeta_k|^2 = -e^{i\theta}\zeta_k |e^{i\theta} - \zeta_k|^2
\end{gathered}$$

より

$$\begin{aligned}
G(e^{i\theta}) &= ce^{2i\ell} \Pi_{k=1}^s \left(-\frac{e^{i\theta}}{\overline{z_k}}\right)^{p_k} \Pi_{k=1}^t \left(-e^{i\theta}\zeta_k\right)^{q_k} \Pi_{k=1}^s \left|e^{i\theta} - z_k\right|^{2p_k} \Pi_{k=1}^t \left|e^{i\theta} - \zeta_k\right|^{2q_k} \\
&= ce^{i(\ell+n)}(-1)^{p_1 + \cdots + p_s + q_1 + \cdots + q_t} \Pi_{k=1}^t (\zeta_k)^{q_k} \Pi_{k=1}^s \left(\frac{1}{\overline{z_k}}\right)^{p_k} |G_0(e^{i\theta})|^2
\end{aligned}$$

となるので

$$\tau(\theta) = |\tau(\theta)| = |G(e^{i\theta})| = |c| \left| \Pi_{k=1}^{s} \left(\frac{1}{\overline{z_k}} \right)^{p_k} \right| |G_0(e^{ii\theta})|^2$$

が成り立つ．よって $\sqrt{c\Pi_{k=1}^{s} \left(\frac{1}{\overline{z_k}} \right)^{p_k}}$ を適当に取れば $\sqrt{c\Pi_{k=1}^{s} \left(\frac{1}{\overline{z_k}} \right)^{p_k}} G_0(z)$ が求める多項式を与える． $\square$

References

[1] M. Tsuji, *Potential theory in modern function theory*, Reprinting of the 1959 original. Chelsea Publishing Co., New York, 1975.

[2] G. M. Goluzin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. **26** Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 1969.

[3] W. Rogosinski, Über positive harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen, Math. Z. **35** (1932), no. 1, 93-121.